TD VI - MICROÉCONOMIE DE L'INCERTAIN
INFÉRENCE BAYESIENNE

ALDRIC LABARTHE

Exercice 2

Définissons les événements :

(1) R : "est réelu"
(2) P : "le sondage donne le politicien gagnant"
(3) T : "le politicien réforme"

Considérons aussi deux variables :

(1) s : la part véritable de citoyens en faveur de la réforme
(2) p : la part estimée par le sondage de citoyens en faveur de la réforme
(3) U : l'utilité du politicien

On peut donc poser : $R|T = [s \geqslant \frac{1}{2}]$, $P = [p \geqslant \frac{1}{2}]$ et $U = \mathbb{1}(R)$. L'énoncé donne $\mathbb{P}\left([s \geqslant \frac{1}{2}]\right) = \frac{1}{2}$ (ce qui permet par exemple de considérer $s \sim \mathcal{U}([0,1])$) et $\mathbb{P}\left(R|\bar{T}\right) = \frac{3}{5}$. Sachant qu'une part $q > \frac{1}{2}$ citoyens mentent (et le font de façon déterministe en disant exactement l'inverse de ce qu'ils pensent), on a $p = qs + (1-q)(1-s)$.

Question 1: $\mathbb{E}[U|T] = \mathbb{P}(R|T) = \mathbb{P}\left([s \geqslant \frac{1}{2}]\right) = \frac{1}{2} < \mathbb{E}\left[U|\bar{T}\right] = \mathbb{P}\left(R|\bar{T}\right) = \frac{3}{5}$: il ne fera donc pas la réforme.

Question 2: Pour calculer la valeur du sondage, on calcule l'espérance de l'utilité en utilisant la connaissance du sondage (et la compare à la question précédente). La seule composante de l'espérance d'utilité impactée par le sondage est

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U|T] &= \mathbb{P}(P|T)\,\mathbb{E}[U|T,P] + \mathbb{P}\left(\bar{P}|T\right)\mathbb{E}\left[U|T,\bar{P}\right] \\
&= \mathbb{P}(P)\,\mathbb{P}(R|T,P) + \mathbb{P}\left(\bar{P}\right)\mathbb{P}\left(R|T,\bar{P}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[p \geqslant \frac{1}{2}\right]\right)\mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2}\right] \mid \left[p \geqslant \frac{1}{2}\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[p < \frac{1}{2}\right]\right)\mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2}\right] \mid \left[p < \frac{1}{2}\right]\right)
\end{aligned}$$

On observe que :

$$\begin{aligned}
p \geqslant \frac{1}{2} &\Leftrightarrow qs + (1-q)(1-s) \geqslant \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow qs + 1 - q - s + qs \geqslant \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow -q - s + 2qs \geqslant -\frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow (2q-1)s \geqslant q - \frac{1}{2} \\
&\Leftrightarrow s \geqslant \frac{q - \frac{1}{2}}{(2q-1)} = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ecole Normale Supérieure (ENS) Paris-Saclay, Gif-sur-Yvette, 91190 France
E-mail address: aldric.labarthe@ens-paris-saclay.fr.
Date: 2024.

Ce qui permet de conclure :

$$\mathbb{E}[U|T] = \mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right)\underbrace{\mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2}\right] | \left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right)}_{=1} + \mathbb{P}\left(\left[s < \frac{1}{2}\right]\right)\underbrace{\mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2}\right] | \left[s < \frac{1}{2}\right]\right)}_{=0}$$
$$= \mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right) = \frac{1}{2}$$

Or l'utilité si le politicien ne réforme pas n'étant pas impactée par l'existence du sondage, on se trouve exactement dans la même situation que dans la question 1, ce qui n'a aucun sens puisque le sondage n'a donc aucun intérêt.

Pourquoi alors le résultat diffère de la correction ? La correction donnée affirme que $\mathbb{P}(P|R,T) = q$. Développons cette expression :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(P|R,T) &= \mathbb{P}\left(\left[p \geqslant \frac{1}{2}\right] | \left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[qs + (1-q)(1-s) \geqslant \frac{1}{2}\right] | \left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2}\right] | \left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right) = 1 \neq q\end{aligned}$$

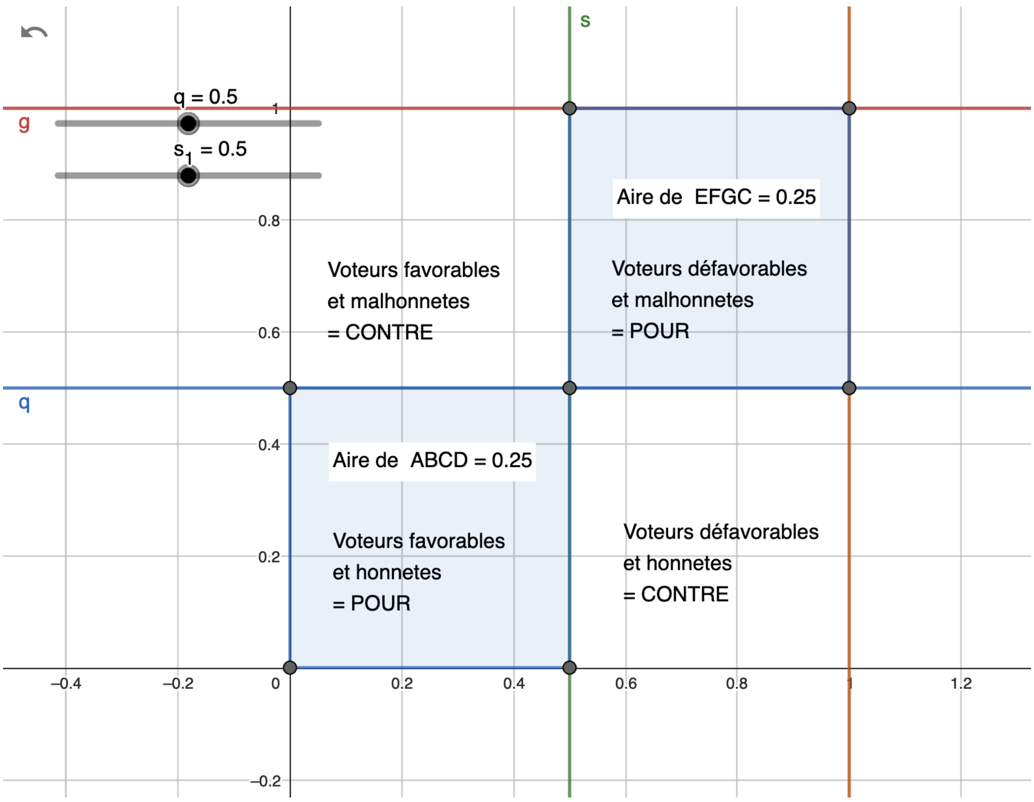

FIGURE 1 – **Illustration du calcul de la probabilité conditionnelle d'un sondage positif sachant une majorité favorable**. Le sondage est positif si l'aire en bleu est supérieure ou égale à $\frac{1}{2}$, ce qui est toujours le cas pour $q > \frac{1}{2}$.

Supposons maintenant que $p = qs$, seuls les électeurs favorables peuvent mentir. Développons l'expression précédente :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(P|R,T) &= \mathbb{P}\left(\left[p \geqslant \frac{1}{2}\right] \mid \left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[qs \geqslant \frac{1}{2}\right] \mid \left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2q}\right] \mid \left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right) \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2q}\right] \cap \left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right)}{\mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right)} \\
&= \frac{\mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2q}\right]\right)}{\mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right)} = \frac{2q-1}{q} = 2 - \frac{1}{q}
\end{aligned}$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[U|T] &= \mathbb{P}\left(\left[p \geqslant \frac{1}{2}\right]\right)\mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2}\right] \mid \left[p \geqslant \frac{1}{2}\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[p < \frac{1}{2}\right]\right)\mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2}\right] \mid \left[p < \frac{1}{2}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[p \geqslant \frac{1}{2}\right]\right)\frac{\mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right)\mathbb{P}\left(\left[p \geqslant \frac{1}{2}\right] \mid \left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right)}{\mathbb{P}\left(\left[p \geqslant \frac{1}{2}\right]\right)} \\
&+ \mathbb{P}\left(\left[p < \frac{1}{2}\right]\right)\frac{\mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right)\mathbb{P}\left(\left[p < \frac{1}{2}\right] \mid \left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right)}{\mathbb{P}\left(\left[p < \frac{1}{2}\right]\right)} \\
&= \mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right)\mathbb{P}\left(\left[p \geqslant \frac{1}{2}\right] \mid \left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right)\mathbb{P}\left(\left[p < \frac{1}{2}\right] \mid \left[s \geqslant \frac{1}{2}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2}\right] \cap \left[s \geqslant \frac{1}{2q}\right]\right) + \mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2}\right] \cap \left[s < \frac{1}{2q}\right]\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\left[s \geqslant \frac{1}{2q}\right]\right) = 1 - \frac{1}{2q}
\end{aligned}$$

L'utilité est alors bien croissante de l'honnêteté des citoyens (et de la fiabilité du sondage !).