Analyse dans $\mathbb{R}^n$ - Licence 2

Aldric Labarthe - Université Paris 1

TD3 - Domaine de définition, graphe, limites ($\pm$ *2 séances*)

Cours 1: Limites à plusieurs variables

Définition Soit $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction, et soit $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. On dit que $\lim_{(x_1,x_2,\ldots,x_n)\to(a_1,a_2,\ldots,a_n)} f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = L$ si, pour tout $\epsilon > 0$, il existe un $\delta > 0$ tel que, pour tous les $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que $\|(x_1, x_2, \ldots, x_n) - (a_1, a_2, \ldots, a_n)\| < \delta$, on ait :

$$|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - L| < \epsilon.$$

Autrement dit, on peut rendre aussi petit que l'on veut la différence $|f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - L|$ en choisissant $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ suffisamment proche de $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Méthode des chemins (ou des directions) Cette méthode consiste à étudier la limite de la fonction le long de différentes trajectoires dans l'espace $\mathbb{R}^n$ tendant vers le point d'intérêt. Si les limites le long de différentes trajectoires donnent des résultats différents, la limite n'existe pas. Si elles sont identiques, la limite existe, et peut être égale à cette valeur (mais ce n'est pas suffisant pour prouver l'égalité !).

Quelques trajectoires à essayer sont :

— $x_1 = a_1, x_2 = a_2, \ldots, x_n = a_n$,

— $x_1 = t, x_2 = t, \ldots, x_n = t$,

— $x_1 = t, x_2 = 0, \ldots, x_n = 0$,

— $x_1 = 0, x_2 = t, \ldots, x_n = 0$,

Méthode par les coordonnées polaires en $\mathbb{R}^2$ La méthode des coordonnées polaires est particulièrement utile dans $\mathbb{R}^2$. On passe du repère cartésien (x, y) au repère polaire (r, θ), où $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$, et $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ représente la distance à l'origine, et θ est l'angle avec l'axe des x. La fonction $f(x, y)$ peut alors être réécrite en termes de r et θ. Si la limite existe indépendamment de θ, alors la limite d'origine existe. Cela permet de se ramener au calcul d'une limite réelle plus facile.

Méthode par les équivalents La méthode par équivalents consiste à utiliser des fonctions équivalentes au voisinage d'un point pour étudier la limite d'une fonction complexe. Si une fonction $f(x, y)$ est équivalente à une autre fonction $g(x, y)$ lorsque $(x, y) \to a$, et si $\lim_{(x,y)\to a} g(x, y) = L$, alors on peut conclure que $\lim_{(x,y)\to a} f(x, y) = L$.

Formellement, on dit qu'une fonction $f(x, y)$ est équivalente à une fonction $g(x, y)$ en a si :

$$\lim_{(x,y)\to a} \frac{f(x, y)}{g(x, y)} = 1.$$

Cela permet de remplacer une fonction difficile à étudier par une fonction plus simple, pour laquelle la limite est plus facile à calculer.

Quelques équivalents utiles :

— $\sin(x) \sim x$ et $\cos(x) \sim 1$ lorsque $x \to 0$.

— $e^x \sim 1 + x$ lorsque $x \to 0$.

— $\ln(1 + x) \sim x$ lorsque $x \to 0$.

— $\sqrt{x} \sim x^{1/2}$ lorsque $x \to 0$.

— $\frac{\sin(x)}{x} \sim 1$ et $\frac{\tan(x)}{x} \sim 1$ lorsque $x \to 0$.

— $x^p \sim x^p$ lorsque $x \to 0$, $p > 0$.

— $\frac{1}{x} \sim 0$ lorsque $x \to \infty$.

— $\frac{x}{e^x - 1} \sim \frac{1}{1} = 1$ lorsque $x \to 0$.

TD4 - Théorèmes sur les fonctions continues et applications ($\pm$ *1 séance*)

Cours 2: Théorème de Weierstrass et compacité dans un espace métrique

Théorème de Weierstrass Soit f une fonction définie sur E un compact de $\mathbb{R}^n$ à valeurs réelles. Si f est continue, alors la fonction f est bornée et atteint ses bornes, autrement dit :

$$\exists c, d \in E : \forall x \in E, f(c) \leqslant f(x) \leqslant f(d)$$

Compacité Un ensemble $C \subset \mathbb{R}^n$ est compact ssi :

1. Pour toute suite à valeurs dans C, il est possible d'extraire une sous-suite convergence vers une limite dans C.
2. Pour toute famille infinie d'ouverts $(\mathcal{A}_i)$ telle que $C \subseteq \bigcup_i \mathcal{A}_i$, il est possible d'extraire une famille dénombrable (indexée sur $I \subset \mathbb{N}$) telle que $C \subseteq \bigcup_{i \in I} \mathcal{A}_i$.
3. C est un fermé borné.