DOMINANCES STOCHASTIQUES POUR ÉCONOMISTES

ALDRIC LABARTHE

L'objectif de ce document est de proposer un rappel des principales définitions et propriétés en lien avec la notion de dominance stochastique ainsi que d'apporter une démonstration des résultats les plus intéressants dans le cadre d'études de niveau L3/M1 en économie formalisée. La connaissance des technicités inhérentes à l'exercice rigoureux de la preuve mathématique de ces notions ne constitue pas un attendu du programme.

Définition 1: Dominance stochastique d'ordre n

Dans l'espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ avec $\Omega \subset \mathbb{R}_+$, pour ν et ρ deux distributions de probabilité dont les fonctions de distribution sont notées $F^1_\nu(t)$ et $F^1_\rho(t)$, on dit que:

ν **domine stochastiquement à l'ordre n** ($n \in \mathbb{N}^*$) ρ ssi $F^n_\nu \leqslant F^n_\rho$

avec $F^n(t) = \int_0^t F^{n-1}(x)dx$ pour $n > 1$. On notera la relation "domine stochastiquement à l'ordre n" $\rho \preccurlyeq_n \nu$.

Lemme 1. *Pour X une variable aléatoire de support $X(\Omega) = \mathbb{R}_+$, et d'espérance définie et finie et $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $u \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ et u croissante,*

$$\mathbb{E}[u(X)] = \int_0^\infty u'(x)(1 - F(x))dx \Rightarrow \mathbb{E}[X] = \int_0^\infty (1 - F(x))dx$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[u(X)] &= \int_0^\infty u(x)f(x)dx \\
&= \int_0^\infty -u(x)(1 - F(x))'dx \\
&= [u(x)(1 - F(x))]_0^\infty + \int_0^\infty u'(x)(1 - F(x))dx \\
&= \underbrace{\lim_{x\to\infty} u(x)(1 - F(x)) - \lim_{x\to 0^+} u(x)(1 - F(x))}_{=0} + \int_0^\infty u'(x)(1 - F(x))dx
\end{aligned}$$

Comme on a supposé que ces moments d'ordre 1 existaient, on sait que les limites sont nécessairement réelles, ce qui complète la preuve. L'implication est assurée en posant $u(x) = x$ qui respecte les conditions sus-évoquées.

□

Ecole Normale Supérieure (ENS) Paris-Saclay, Gif-sur-Yvette, 91190 France
E-mail address: aldric.labarthe@ens-paris-saclay.fr.
Date: 2024.

Théorème 1: Espérance et dominance stochastique d'ordre 1

Pour X et Y deux variables aléatoires de l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à support $\mathbb{R}_+$ dont l'espérance existe et est finie, avec $X \hookrightarrow \rho, Y \hookrightarrow \nu$,

$$\rho \preccurlyeq_1 \nu \Leftrightarrow \forall t,\ F^1_\nu(t) \leqslant F^1_\rho(t) \Leftrightarrow \forall u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ croissante et } \mathcal{C}^1,\ \mathbb{E}\left[u(X)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[u(Y)\right]$$

Démonstration. ($\Rightarrow$): en utilisant notre lemme précédent,

$$\begin{aligned} \forall t, F^1_\nu(t) \leqslant F^1_\rho(t) \Rightarrow \forall t, 1 - F^1_\nu(t) \geqslant 1 - F^1_\rho(t) & \\ \int_{\mathbb{R}_+} u'(t)(1 - F^1_\rho(t))dt &\leqslant \int_{\mathbb{R}_+} u'(t)(1 - F^1_\nu(t))dt \\ &\Rightarrow \mathbb{E}\left[u(X)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[u(Y)\right] \end{aligned}$$

($\Leftarrow$): On procède selon un raisonnement par l'absurde. Supposons que $\mathbb{E}\left[u(X)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[u(Y)\right]$ mais que $\rho \not\preccurlyeq_1 \nu$, c'est-à-dire $\exists z, F^1_\rho(z) < F^1_\nu(z)$. On construit alors la fonction $u(x) = \mathbb{1}(x > z)$ qui est bien croissante (en l'occurence elle est constante).

$$\begin{aligned} F^1_\rho(z) < F^1_\nu(z) &\Rightarrow 1 - F^1_\rho(z) > 1 - F^1_\nu(z) \\ &\Rightarrow \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}(x > z)dF^1_\rho(t) > \int_{\mathbb{R}_+} \mathbb{1}(x > z)dF^1_\nu(t) \\ &\Rightarrow \mathbb{E}\left[u(X)\right] > \mathbb{E}\left[u(Y)\right] \end{aligned}$$

Ce qui contredit notre hypothèse.

□

Remarque 1. *Le précédent théorème implique que,* ***à l'ordre 1,*** *tout agent rationnel préférera la loterie distribuée selon ν, car l'espérance d'utilité sera toujours supérieure, quelle que soit la fonction d'utilité de l'agent.*

Théorème 2: Dominance stochastique d'ordre 1 et MPS

Pour X et Y deux variables aléatoires de l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à support $\mathbb{R}_+$ et carré intégrable, avec $X \hookrightarrow \rho, Y \hookrightarrow \nu$,

$$\rho \preccurlyeq_2 \nu \Leftrightarrow \exists \epsilon \in L^2, \exists \delta \geqslant 0, \quad X = Y - \delta + \epsilon \quad \mathbb{E}[\epsilon | Y - \delta] = 0$$

Démonstration (Hors programme). On se place uniquement dans le cas où $\delta = 0$, c'est-à-dire le cas où X et Y ont la même espérance, sans quoi la preuve est trop directe. ($\Leftarrow$):

$$\mathbb{P}(X = x) = \mathbb{P}(Y + \epsilon = x) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{0 \leqslant t \leqslant x} [Y = x - t] \cap [\epsilon = t]\right)^{1} = \int_0^x f_\nu(x - t) f_\epsilon(t) dt$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \leqslant y) &= \int_0^y \left(\int_0^x f_\nu(x - t) f_\epsilon(t) dt\right) dx = \int_0^y \left(\int_t^y f_\nu(x - t) f_\epsilon(t) dx\right) dt \\ &= \int_0^y \left(\int_t^y f_\nu(x - t) f_\epsilon(t) dx\right) dt = \int_0^y f_\epsilon(t) \left(\int_0^{y - t} f_\nu(u) du\right) dt \end{aligned}$$

[1]Cette opération se nomme convolution (notée $f_\nu \star f_\epsilon$) et est un outil fondamental du calcul probabiliste.

$$\begin{aligned}
F^1_X(y) &= \int_0^y f_\epsilon(t) F^1_\nu(y-t)dt \\
\Rightarrow \int_0^z F^1_X(y)dy &= \int_0^z \int_0^y f_\epsilon(t) F^1_\nu(y-t)dtdy = \int_0^z f_\epsilon(t)\left(\int_t^z F^1_\nu(y-t)dy\right)dt \\
&= \int_0^z f_\epsilon(t)\left(\int_0^{z-t} F^1_\nu(y)du\right)dt = \int_0^z f_\epsilon(t) F^2_\nu(z-t)dt \\
\Rightarrow F^2_\rho(z) &= \int_0^z f_\epsilon(t) F^2_\nu(z-t)dt
\end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Jensen, car $F^2_\nu(z)$ est non-décroissante, on a:

$$F^2_\rho(z) = \int_0^z f_\epsilon(t) F^2_\nu(z-t)dt \geqslant F^2_\nu(z)\int_0^z f_\epsilon(t)dt \geqslant F^2_\nu(z)$$

($\Rightarrow$): en réutilisant que, si une telle décomposition existait, on aurait $f_\rho(x) = \int_0^x f_\nu(x-t)f_\epsilon(t)dt$, on commence par montrer que pour toute paire de distribution de probabilités (ν, ρ), il existe bien une distribution ϵ qui permet de vérifier la formule précédente. Une fois l'existence d'une telle loi prouvée, on montre qu'elle ne peut être qu'un bruit blanc. On suppose l'appartenance à L^2.

En utilisant que f_ν, et f_ρ sont des densité de probabilité L^2 et que f_ϵ est une densité de probabilité L^2, on peut utiliser les propriétés de la transformée de Fourier $\mathcal{F}$ pour obtenir:

$$\begin{aligned}
f_\rho(x) = \int_0^x f_\nu(x-t)f_\epsilon(t)dt \Rightarrow \mathcal{F}(f_\rho) &= \mathcal{F}(f_\epsilon)\cdot\mathcal{F}(f_\nu) \\
\Rightarrow \mathcal{F}(f_\epsilon) &= \frac{\mathcal{F}(f_\rho)}{\mathcal{F}(f_\nu)} \\
\Rightarrow f_\epsilon &= \mathcal{F}^{-1}\left(\frac{\mathcal{F}(f_\rho)}{\mathcal{F}(f_\nu)}\right)
\end{aligned}$$

On a donc prouvé l'existence de f_ϵ (on renvoie aux propriétés de la transformée de Fourier pour la garantie qu'il s'agit bien d'une densité de probabilités).

Supposons maintenant par contradiction que $\mathbb{E}[\epsilon|Y-\delta] \neq 0$. Comme on a supposé que X et Y avaient la même espérance, par linéarité de l'opérateur espérance, on obtient une contradiction directe. □

Remarque 2. *Le précédent théorème implique que toute loterie dérivée d'une première à laquelle on ajoute un bruit blanc sera dominée à l'ordre 2 par la première.*

Théorème 3: Espérance et dominance stochastique d'ordre 2

Pour X et Y deux variables aléatoires de l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ à support $\mathbb{R}_+$ et carré intégrable, avec $X \hookrightarrow \rho, Y \hookrightarrow \nu$,

$$\rho \leqslant_2 \nu \Leftrightarrow \forall u : \mathbb{R} \longmapsto \mathbb{R} \text{ croissante, concave et } \mathcal{C}^2,\ \mathbb{E}\left[u(X)\right] \leqslant \mathbb{E}\left[u(Y)\right]$$

Démonstration. ($\Rightarrow$):

On utilise le théorème 2, en supposant sans perte de généralité que $\delta = 0$,

$$\mathbb{E}(u(X)) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(u(Y+\epsilon)|Y)) \leqslant \mathbb{E}(u(\mathbb{E}(Y+\epsilon|Y))) = \mathbb{E}(u(Y))$$

par le théorème de l'espérance itérée et la concavité de u.

($\Leftarrow$): Par une double IPP,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(u(X)) &= \int_0^\infty u(x)f(x)dx = \left[u(x)F^1(x)\right]_0^\infty - \int_0^\infty u'(x)F(x)dx \\ &= \left[u(x)F^1(x)\right]_0^\infty - \left[u'(x)F^2(x)\right]_0^\infty + \int_0^\infty u''(x)F^2(x)dx\end{aligned}$$

Par la concavité de u, on a:

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}_\rho(u(X)) \leqslant \mathbb{E}_\nu(u(Y)) \Leftrightarrow 0 \leqslant \mathbb{E}_\nu(u(Y)) - \mathbb{E}_\rho(u(X)) \\ \Leftrightarrow &\underbrace{\left[u(x)F_\nu^1(x)\right]_0^\infty - \left[u'(x)F_\nu^2(x)\right]_0^\infty - \left[u(x)F_\rho^1(x)\right]_0^\infty - \left[u'(x)F_\rho^2(x)\right]_0^\infty}_{=0} \\ &+ \int_0^\infty u''(x)\left(F_\nu^2(x) - F_\rho^2(x)\right)dx \geqslant 0 \\ \Leftarrow &F_\nu^2(x) \leqslant F_\rho^2(x)\end{aligned}$$

□

Remarque 3. *Le précédent théorème implique que,* ***à l'ordre 2,*** *tout agent rationnel* ***averse au risque*** *préférera la loterie distribuée selon ν, car l'espérance d'utilité sera toujours supérieure, quelle que soit la fonction d'utilité de l'agent.*

Proposition 1: Récurrence et dominance stochastique d'ordre n

Pour ν et ρ deux distributions de probabilité pour qui pour tout n, si F^n existe,

$$\rho \preccurlyeq_1 \nu \Rightarrow \rho \preccurlyeq_2 \nu \Rightarrow ... \Rightarrow \rho \preccurlyeq_n \nu$$

Démonstration. On prouve cette propriété par récurrence immédiate (sous couvert d'existence de F^{n+1}):

$$\rho \preccurlyeq_n \nu \Rightarrow \forall t, F_\nu^n(t) \leqslant F_\rho^n(t) \Rightarrow \forall z, \int_0^z F_\nu^n(t)dt \leqslant \int_0^z F_\rho^n(t)dt \Rightarrow \rho \preccurlyeq_{n+1} \nu$$

□