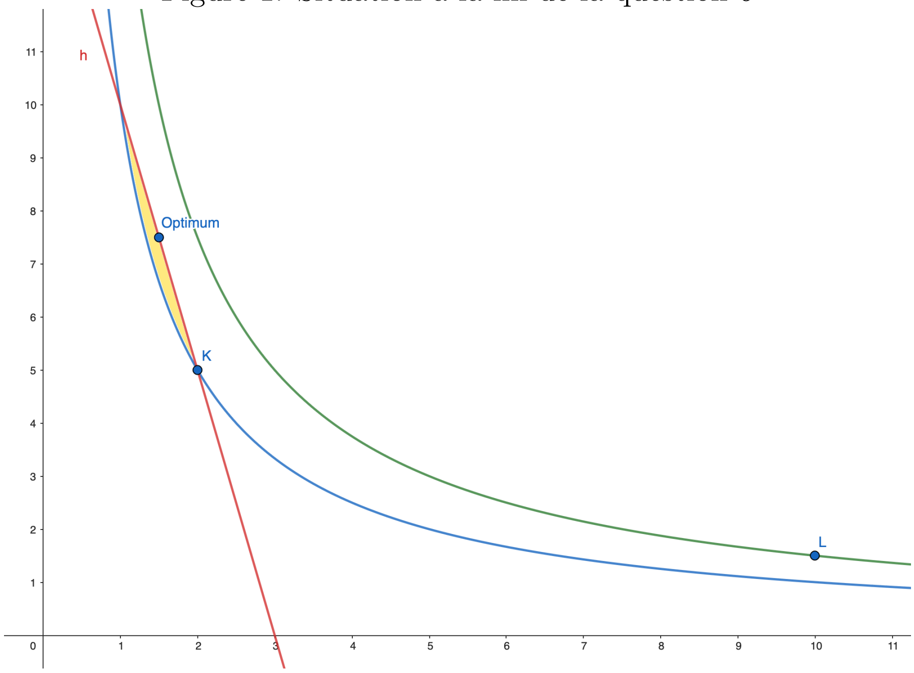
Elements sur le TMS
Approfondissement des dernières questions du TD1-II

Aldric Labarthe

1 Correction de l'exercice

A la fin de la question 6, nous obtenons le graphique proposé en **??**. On y trouve les paniers proposés, les deux courbes d'indifférence, la contrainte budgétaire, et l'ensemble (en orange) des paniers qui procurent une satisfaction supérieure à K, mais qui respectent la contrainte budgétaire.

Figure 1: Situation à la fin de la question 6



Question 7 Avant de traiter la question, il convient de bien comprendre son objectif : on cherche ici à se déplacer sur la courbe d'indifférence, à chercher de combien de litres de soupe notre consommatrice doit se départir pour obtenir plus de chocolat, tout en restant bien sur un même niveau d'utilité. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées, mais la plus simple semble être d'utiliser le fait que la consommatrice reste sur la courbe d'indifférence. Tout panier à trouver respectera donc la relation $x_b = \frac{10}{x_a}$. K étant $(2; 5)$ on a :

- Pour avoir 3kg de chocolat, on passe donc à $x_a = 3$ ce qui impose $x_b = \frac{10}{3}$. On en déduit $\Delta_{x_a} = 3 - 2 = 1$ et $\Delta_{x_b} = \frac{10}{3} - 5 = -\frac{5}{3}$ soit $TMS = -\frac{\Delta_{x_b}}{\Delta_{x_a}} = \frac{5}{3}$
- Pour avoir 1kg de chocolat, on passe donc à $x_a = 1$ ce qui impose $x_b = \frac{10}{1} = 10$. On en déduit $\Delta_{x_a} = 1 - 2 = -1$ et $\Delta_{x_b} = 5 - 10 = -5$ soit $TMS = -\frac{\Delta_{x_b}}{\Delta_{x_a}} = \frac{1}{5}$

Ce "taux d'échange" est en réalité un "taux moyen de substitution" (TMS, mais on évitera d'utiliser cet acronyme dans ce cas pour ne pas prêter à confusion), qu'il ne faut pas confondre avec le "taux marginal de substitution" (TmS) qui est l'objet de la question suivante.

Question 8 L'objectif de la question est de présenter une autre manière de calculer un taux d'échange. La question 7 traite de variations discrètes de quantités, ce qui est assez limité. Dans cette question, on cherche à vous proposer de généraliser la notion de variation de consommation à des variations continues, et donc étudier le rapport d'échange marginal (TmS). Comme nous l'avons vu en classe, on peut calculer le TmS en utilisant la formule : $TmS = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_a}}{\frac{\partial U}{\partial x_b}}$. Toutefois, une troisième manière de calculer le TmS est d'exploiter son lien avec la courbe d'indifférence, en utilisant : $TmS = -\frac{\partial x_b(x_a)}{\partial x_a}$ avec $x_b(x_a)$ l'équation de la courbe d'indifférence. Dans le contexte, on a :

$$TmS = -\frac{\partial x_b(x_a)}{\partial x_a} = -\frac{\partial \frac{10}{x_a}}{\partial x_a} = -\frac{-10}{{x_a}^2} = \frac{10}{{x_a}^2}$$

2 Notions à retenir

On retiendra deux définitions du concept de Taux marginal de substitution (TmS ou plus simplement TMS) :

$$\text{TmS} = -\frac{\partial x_b(x_a)}{\partial x_a} \text{ ou } \text{TmS } = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_a}}{\frac{\partial U}{\partial x_b}}$$

On se rappellera que le TmS s'intéresse aux variations infinitésimales de consommation, et non aux variations discrètes (à "gros pas"). Dans ce dernier cas, la mesure la plus proche est celle du Taux moyen de substitution, qui se calcule comme :

$$\text{TMS} = -\frac{\Delta_{x_b}}{\Delta_{x_a}}$$

3 Preuves (optionnel)

Du lien entre TmS et TMS On rappelle qu'en analyse, dx n'est qu'une manière de noter $\lim_{\Delta_x \to 0} \Delta_x$. Ainsi par la définition des dérivées : $\lim_{\Delta_{x_a} \to 0} -\frac{\Delta_{x_b}}{\Delta_{x_a}} = -\frac{dx_b}{dx_a}$. On retiendra donc que le taux marginal de substitution (TmS) est la limite du taux moyen de substitution (TMS).

De la définition du TmS par les utilités marginales *On rappelle que la définition mathématique du TmS est* $-\frac{dx_b}{dx_a}$. On commence par établir la différentielle totale de l'utilité qui capture la variation de la fonction d'utilité en fonction de chacune des variables :

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x_a} dx_a + \frac{\partial U}{\partial x_b} dx_b$$

La définition économique du TmS impose de se déplacer sur une courbe d'indifférence définie, c'est-à-dire de rester à utilité constante. On impose donc que la variation de l'utilité soit nulle $dU = 0$:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial U}{\partial x_a} dx_a + \frac{\partial U}{\partial x_b} dx_b \\ -\frac{\partial U}{\partial x_b} dx_b &= \frac{\partial U}{\partial x_a} dx_a \qquad (1) \\ \text{TmS} = -\frac{dx_b}{dx_a} &= \frac{\frac{\partial U}{\partial x_a}}{\frac{\partial U}{\partial x_b}} \end{aligned}$$

Du lien entre dérivée de la courbe d'indifférence et du TmS On note $x_b(x_a)$ l'expression de la courbe d'indifférence. Cette dernière permet de trouver tous les paniers qui donneront la même satisfaction. On peut donc écrire :

$$\forall x_a \in \mathbb{R}_+, \exists \bar{U} \in \mathbb{R}_+, \text{ tel que } U(x_a, x_b(x_a)) = \bar{U}$$

De ce fait, on a $dU(x_a, x_b(x_a)) = 0$,

$$0 = \frac{\partial U}{\partial x_a} dx_a + \frac{\partial U}{\partial x_b} dx_b$$

Toutefois, ici comme x_b est une fonction dx_b désigne la différentielle totale de cette fonction à une variable :

$$dx_b = \frac{\partial x_b}{\partial x_a} dx_a$$

On réinjecte cette différentielle dans celle de l'utilité et on réagence pour obtenir le TmS :

$$\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial U}{\partial x_a} dx_a + \frac{\partial U}{\partial x_b} \frac{\partial x_b}{\partial x_a} dx_a \\
-\frac{\partial U}{\partial x_a} dx_a &= \frac{\partial U}{\partial x_b} \frac{\partial x_b}{\partial x_a} dx_a \\
-\frac{\frac{\partial U}{\partial x_a}}{\frac{\partial U}{\partial x_b}} dx_a &= \frac{\partial x_b}{\partial x_a} dx_a \\
\text{TmS} = \frac{\frac{\partial U}{\partial x_a}}{\frac{\partial U}{\partial x_b}} &= -\frac{\partial x_b}{\partial x_a}
\end{aligned} \tag{2}$$