Analyse dans $\mathbb{R}^n$ - Licence 2

Aldric Labarthe - Université Paris 1

Les exercices proposés ici sont ceux de l'année 2024-2025. Chaque séance est prévue sur deux heures et demie. Les exercices marqués par ★ sont considérés par l'équipe pédagogique comme incontournables. A l'inverse, ceux indiqués comme ☾ sont des exercices présents dans l'ancienne brochure et qui ont été retirés du programme cette année. Ceux-ci sont en général plus théoriques et complexes. Les énoncés sont écrits par Prof. Gisella Groce et les corrections et les rappels de cours sont le travail d'Aldric Labarthe.

TD6 - Théorèmes sur les fonctions dérivables et premiers problèmes d'optimisation (± *2 séances*)

Rappel 1: Théorème de Lagrange, cas réel

Théorème de la valeur moyenne Soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$, une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe alors au moins un point $c \in]a,b[$ qui vérifie :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Géométriquement, il existe un point c où la tangente au graphe de f est parallèle à la droite sécante reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.
Pourquoi faire ? Pour des fontions sur $\mathbb{R}^n$ on a que $|f(x+h) - f(x)| = |\nabla f(x) \cdot h|$, ce qui permet donc d'estimer facilement $|f(x+h) - f(x)|$.

Exercice 6.1 — Montrer le théorème de la valeur moyenne : Soit A un ouvert de $\mathbb{R}^n$, soit $f : A \to \mathbb{R}$ différentiable en A. Alors pour tout couple de points x_0, x_1 de $\mathbb{R}^n$, tel que le segment $[x_0, x_1]$ est contenu dans A, il existe $x^* \in [x_0, x_1]$ tel que

$$f(x_0) - f(x_1) = \nabla f(x^*) \cdot (x_0 - x_1)$$

Correction 6.1 Le segment $[x_0, x_1]$ peut s'exprimer comme $\gamma(t) = (1-t)x_0 + tx_1$, $t \in [0,1]$. On définit $h(t) = f(\gamma(t))$ différentiable sur $[0,1]$ comme composée de fonctions qui le sont.

On a : $h'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot \gamma'(t) = \nabla f(\gamma(t)) \cdot (x_1 - x_0)$.

Par le théorème de Lagrange, comme h est univariée on a :

$$\exists t^* \in (0,1) : h(t^*) = \frac{h(1) - h(0)}{1 - 0} = f(x_1) - f(x_0)$$

En remplaçant par l'expression de $h'(t)$ on a : $h(t^*) = \nabla f(\gamma(t^*)) \cdot (x_1 - x_0)$ soit :

$$\nabla f(\gamma(t^*)) \cdot (x_1 - x_0) = f(x_1) - f(x_0)$$

Exercice 6.2 — Un coureur parcourt une distance de 50 mètres en 5.8 secondes. L'erreur qu'on fait sur la distance est de 0.1 mètres, l'erreur sur le temps est 0.01 secondes. Donner une estimation de l'erreur commise sur le calcul de la vitesse moyenne.

Correction 6.2 L'idée de l'exercice est d'utiliser l'approximation permise par Lagrange : la fonction est la vitesse moyenne $v(l,t) = \frac{l}{t}$ et le vecteur $h \pm (0.1, 0.01)$. On a donc

$$|v(x+h) - v(x)| = |\nabla v(x) \cdot h|$$

On exprime $\nabla v(x) = (\frac{1}{t}, -\frac{l}{t^2})$ ce qui donne en $(50, 5.8)$:

$$|v((50,5.8) + (0.1, 0.01)) - v((50,5.8))| = |\nabla v((50,5.8)) \cdot 0.1, 0.01)|$$

Cours 1: Cônes ouverts et fonctions homogènes

Cône ouvert Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est un cône ouvert ssi :

$$\forall \lambda > 0 : x \in C \Rightarrow \lambda x \in C$$

Fonction homogène Une fonction $f : C \to \mathbb{R}$ est dite homogène de degré α sur un cône $C \subseteq \mathbb{R}^n$ ssi :

$$\forall x \in C, \forall \lambda > 0, \quad f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$$

Théorème d'Euler $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction homogène de degré α ssi

$$\forall x \in C : \quad \langle x, \nabla f(x) \rangle = \alpha f(x)$$

Exercice 6.3 ★ —

Montrer la proposition suivante : Soit $f : A \to \mathbb{R}$ dérivable sur un cone ouvert A de $\mathbb{R}^n$. Si f est une fonction homogène de degré α sur A, alors pour tout $i = 1...n$, $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est homogène de degré $\alpha - 1$ sur A.

Correction 6.3

Attention : ici on a f dérivable et pas différentiable ! On ne peut donc pas utiliser la formule de dérivation composée par exemple. Le raisonnement suivant est donc insuffisant :

$$\forall x \in C, \forall \lambda > 0, f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x) \Rightarrow \frac{\partial}{\partial x} f(\lambda x) - \lambda^\alpha f(x) = \lambda \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x) - \lambda^\alpha \frac{\partial f}{\partial x}(x) = 0$$
$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(\lambda x) = \lambda^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x}(x)$$

Comme f est seulement dérivable, le bon réflexe est d'utiliser le théorème d'Euler (qui donne le même résultat, mais sans supposer la différentiabilité) :

$$\begin{aligned}
\forall x \in C : \quad \langle x, \nabla f(x) \rangle = \alpha f(x) &\Rightarrow \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{x_i} = \alpha f(x) \\
&\Rightarrow \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) = \alpha \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \\
&\Rightarrow \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} + \left(\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) = \alpha \frac{\partial f(x)}{\partial x_j} \\
&\Rightarrow \left(\sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right) = (\alpha - 1) \frac{\partial f(x)}{\partial x_j}
\end{aligned}$$

Ce qui est l'identité d'Euler pour une fonction homogène de degré $\alpha - 1$, d'où $\frac{\partial f(x)}{\partial x_j}$ est homogène de degré $\alpha - 1$.

Exercice 6.4 —

Soit $A = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}$.

Montrer que $|\det(A)| \leqslant \frac{1}{2} \|x\|^2$, où $\|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2$.

Correction 6.4 La première étape est d'observer que det : $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \longmapsto \mathbb{R}$ et $\|\cdot\|^2$ sont deux fonctions homogènes de degré 2 : $\forall \lambda > 0, x \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$,

$$\det(\lambda x) = \lambda x_1 \lambda x_4 - \lambda x_2 \lambda x_3 = \lambda^2 \det(x)$$

$$\|\lambda x\|^2 = \lambda^2 x_1^2 + \lambda^2 x_2^2 + \lambda^2 x_3^2 + \lambda^2 x_4^2 = \lambda^2 \|x\|^2$$

De ce fait la fonction $f(x) = \frac{\det(x)}{\|x\|^2}$ est homogène de degré 0, ce qui réduit sont analyse sur les x de norme 1. En effet, pour tout x de norme non-unitaire et non nulle, on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, x \neq 0 : \|x\|^2 \neq 1, \quad \exists y \in \mathbb{R}^n, y = \frac{x}{\|x\|^2} \Rightarrow x = \|x\|^2 y$$

Or comme f est homogène de degré 0, $f(x) = f(\|x\|^2 y) = (\|x\|^2)^0 f(y) = f(y)$, or y est de norme 1 par construction, ce qui est bien ce qu'on voulait établir (étudier un vecteur de norme non-unitaire se réduit à étudier un vecteur de norme 1).

Maximisons cette fonction f pour dégager une borne supérieure. Le maximum de $\frac{1}{\|x\|^2}$ s'atteint pour tout vecteur de norme 1. Cherchons donc le maximum de $\det(x)$ sous cette contrainte.

$$\begin{cases} X \in \max x_1 x_4 \\ X \in \min x_2 x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X \in \max x_1 x_4 \\ X \in \max -x_2 x_3 \end{cases} \Rightarrow X \in \max x_1 x_4 - x_2 x_3 = \det(X)$$

Or il est aisé de voir que :

$$\begin{cases} X \in \max x_1 x_4 \\ X \in \min x_2 x_3 \end{cases} \Leftrightarrow X \in \text{vect}(1, -1, 1, 1)$$

D'où si on choisit un vecteur de cet espace vectoriel engendré qui respecte notre contrainte, on a :

$$x^M = \frac{1}{\|(1, -1, 1, 1)\|^2}(1, -1, 1, 1) = \frac{1}{4}(1, -1, 1, 1)$$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}), \quad & f(x) \leqslant f(\frac{1}{4}(1, -1, 1, 1)) = \det(\frac{1}{4}(1, -1, 1, 1)) = \frac{1}{2} \\ & \Rightarrow \frac{\det(x)}{\|x\|^2} \leqslant \frac{1}{2} \end{aligned}$$