Rappel : Théorème de Lagrange $\exists c \in [a,b]$ si $f : [a;b] \to \mathbb{R}$ est continue,

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Cas multivarié : $f(x_0) - f(x_1) = \nabla f(x^*)(x_0 - x_1)$
avec $x^* \in [x_0, x_1]$ pour f continue

$\boxed{6.2}$ 50 m, 5,8 secondes, erreur distance 0.1 m, erreur tps 0.01 s.
Estimer l'erreur sur la vitesse moyenne.

$v(l,t) = \frac{l}{t}$ l : distance, t : temps
$(\mathbb{R}_*^+)^2 \to \mathbb{R}$ continue et différentiable

$h = (0{,}1 ; 0{,}01)$

$$|v(x+h) - v(x)| = |\nabla v(x) \cdot h| \text{ par Lagrange}$$

$\nabla v(x) = \left(\frac{1}{t}, -\frac{l}{t^2}\right)$ on estime en $x = (50, 5.8)$

$$|v((50,5.8)+(0.1,0.01)) - v((50,5.8))| = \left|\left(\frac{1}{5.8}, \frac{-50}{(5.8)^2}\right) \cdot (0.1, 0.01)\right|$$

Rappel : Pour chercher les extrema sur un compact d'une fct différentiable

① Théorème de FERMAT $\to$ sur l'intérieur de l'ensemble

② Etude des bords.

$\boxed{6.10}$ $f(x,y) = |x|^{1/4} + |y|^{1/4}$ $D = \{x^2+y^2 \le 2\}$

- $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $0 \le f(x,y)$ et $\exists (x';y') \in D$ $f(x';y') = 0$
  Donc 0 est un minorant de f.

- $f(x,y) = (x^2)^{1/8} + (y^2)^{1/8}$ $x = \sqrt{2}\cos\theta$ $y = \sqrt{2}\sin\theta$

  $f(\theta) = 2^{1/8}\left((\cos^2\theta)^{1/8} + (\sin^2\theta)^{1/8}\right)$
  f sur la bordure s'écrit comme $\{\theta \in \mathbb{R}, 2^{1/8}((\cos^2\theta)^{1/8}, (\sin^2\theta)^{1/8})\}$

- Comment on savait que le maximum serait sur le bord ?
  1) Théorème de Fermat :
  $$\nabla f = 0 \iff \begin{cases} \frac{1}{8} 2x\,(x^2)^{\frac{1}{8}-1} = 0 \\ \frac{1}{8} 2y\,(y^2)^{\frac{1}{8}-1} = 0 \end{cases}$$ Pas un maximum sur $\mathrm{int}(D)$

  2) Posons $x = R\cos\theta$ $y = R\sin\theta$ $0 \le R \le \sqrt{2}$

  $$f(\theta, R) = R^{1/8}\left((\cos^2\theta)^{1/8} + (\sin^2\theta)^{1/8}\right)$$

  $\to$ est maximum pour $R = \sqrt{2}$

- Trouvons le maximum sur le bord $\{\theta \in \mathbb{R}, (2)^{1/8}((\cos^2\theta)^{1/8} + (\sin^2\theta)^{1/8})\}$
  Le maximum est atteint pour $\theta \in \{n \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{4} + 2\pi n\}$

$\boxed{6.11}$ $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$ sur $\underbrace{(-1,1) \text{ rayon } \sqrt{2}}_{D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x = \sqrt{2}\cos\theta - 1,\ y = \sqrt{2}\sin\theta - 1\}}$

f est continue + différentiable sauf en $x = -y$ où elle n'existe pas.

là où il existe

1) $\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} \frac{2x(x+y) - (x^2+y^2)}{(x+y)^2} = 0 \\ \frac{2y(x+y) - (x^2+y^2)}{(x+y)^2} = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + 2xy - y^2 = 0 \\ 2xy + y^2 - x^2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$

Mais f n'existe pas en $(0,0)$ donc par Fermat, f n'a pas d'extremum sur l'intérieur.

2) $g(\theta) = f(\sqrt{2}\cos\theta - 1, \sqrt{2}\sin\theta - 1)$

$$= \frac{(\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2 + (\sqrt{2}\sin\theta - 1)^2}{\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta) - 2} = \frac{2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 + 2\sin^2\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta + 1}{\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta) - 2}$$

$2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2$

$$= \frac{2(2 - \sqrt{2}\cos\theta - \sqrt{2}\sin\theta)}{\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta) - 2} = -2$$

f est donc constante sur le bord, d'où l'extremum est tout le bord.

$\boxed{6.12}$ $f(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} + \sqrt{y^2 + (x-a)^2}$ $a > 0$

$$f(x,y) = \|(x,y) - (0,a)\|_2 + \|(x,y) - (a,0)\|_2$$

$$\|2(x,y) - (a,a)\|_2 \le \|(x,y) - (0,a)\|_2 + \|(x,y) - (a,0)\|_2 = f(x,y)$$

$\|2(x,y) - (a,a)\|_2 = \sqrt{(2x-a)^2 + (2y-a)^2}$ ce qui est minimal pour $x = y = \frac{a}{2}$
(car $\|\cdot\|_2 \ge 0$)

$f\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right)$ est le minimum de f, et il vaut $f\left(\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right) = \sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{a}{2} - a\right)^2} + \sqrt{\frac{a^2}{4} + \left(\frac{a}{2} - a\right)^2}$
$= a\sqrt{2}$

$\boxed{6.13}$ $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y + 1$ $(1,1)$ seul min ?

f continue, différentiable sur $\mathbb{R}^2$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} 2x - 2y = 0 \\ 4y - 2x - 2 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = y \\ x = 1 \end{cases} \iff (x,y) = (1,1)$$

On peut écrire $f(x,y) = (x-y)^2 + (y-1)^2$
$\Rightarrow f(x,y) \ge 0$ pour tout x et y
$\Rightarrow f(1,1) = 0$ est donc un min. global.

$\boxed{6.14}$ $f(x,y) = \sin x\, e^y$ Mq pas d'extremum

Par Fermat, comme f est différentiable sur $\mathbb{R}^2$,

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} \cos x\, e^y = 0 \\ \sin x\, e^y = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \cos x = 0 \\ \sin x = 0 \end{cases} \text{ impossible}$$

7.1 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Pour $(x,y) \neq (0,0)$ f est différentiable comme composée de polynomes.

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{(3x^2y)(x^2+y^2) - 2x(x^3y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^2y(x^2+3y^2)}{(x^2+y^2)^2} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{x^3(x^2+y^2) - (x^3y)(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{x^3(x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^2} \end{aligned}\right\} \text{pour } (x,y) \neq (0,0)$$

En $(0,0)$: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = 0$$

Calculons les dérivées secondes mixtes :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \frac{1}{h}\left(\frac{h^5}{h^4}\right) = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = 0$$

D'où $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ en $(0,0)$

7.2 $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{y}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ $\quad f_{xy}(0,0) \quad f_{yx}(0,0)$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} 2x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} x \cos \frac{y}{x} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \frac{h \cos 0 - 0}{h} = 1$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$$

7.3 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ pour
1) $f_1(x,y) = e^x \sin y$
2) $f_2(x,y) = x^3 - 3xy^2$
3) $f_3(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

1) $\frac{\partial f_1}{\partial x} = \sin y \, e^x \qquad \frac{\partial f_1}{\partial y} = e^x \cos y$

$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \sin y \, e^x \qquad \frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = -e^x \sin y \qquad$ CQFD

2) $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -6xy$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6x \qquad$ CQFD

3) $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -12x^2y + 4y^3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 12y^2 \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12x^2 + 12y^2 \qquad$ CQFD

7.4 Différentielle en $(0,0)$ $f(x,y) = e^x \sin y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin y \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \sin y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^x \cos y \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \sin y$

vecteur $\qquad$ Matrice 2x2

$$d^2_{(h_1,h_2)} f(x,y) = (x \quad y)\, H_f(h_1,h_2)\, (x \quad y)^T$$

$$= (x \quad y) \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix}_{(h_1,h_1)} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= (x \quad y) \begin{pmatrix} e^{h_1} \sin h_2 & e^{h_1} \cos h_2 \\ e^{h_1} \cos h_2 & -e^{h_1} \sin h_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= e^{h_1} \left[(x \sin h_2 + x \cos h_2 \quad x \cos h_2 - y \sin h_2) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right]$$

$$= e^{h_1} \left[x^2 \sin h_2 + 2xy \cos h_2 - y^2 \sin h_2 \right)$$

si $(h_1,h_2) = (0,0)$ alors $d^2_{(0,0)} f(x,y) = e^0 (x^2 \sin 0 + 2xy \cos 0 - y^2 \sin 0)$

$$= 2xy$$

7.5 Rappel : Une matrice M est :

* définie positive :
→ si $\forall X \neq 0 \quad X^T M X > 0$
→ si toutes les val. propres sont st. positives
→ si tous les mineurs diagonaux principaux sont st. pos

ex $M = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$
1er mineur $\det(m_{11}) = m_{11}$
2e mineur $\det\begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}$
3e mineur $\det(M)$

* définie négative :
→ si $\forall X \neq 0 \quad X^T M X < 0$
→ si les val. propres sont st. negatives
→ si les mineurs diagonaux sont du signe $(-1)^n$
→ si $-M$ est définie positive

* indéfinie : si M a des val. propres qui alternent de signe

1) $q_1(x,y) = 2x^2 + 3xy - 5y^2$

$Q_1 = \begin{pmatrix} 2 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -5 \end{pmatrix} \qquad \det m_1 = 2 > 0$
$\qquad \det m_2 = \det Q_1 = -10 - \left(\frac{3}{2}\right)^2 < 0$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & -5-\lambda \end{vmatrix} = -(2-\lambda)(5+\lambda) - \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$= -10 - 2\lambda + 5\lambda + \lambda^2 - \frac{9}{4}$$
$$= -\frac{49}{4} + 3\lambda + \lambda^2 \qquad \Delta = 9 + 4 \cdot \frac{49}{4}$$
$$= 58$$

→ indéfini ...

2) $q_2(x,y) = 2x^2 + 4xy + 3y^2$

$Q_2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{aligned} &\det(m_1) = 2 > 0 \\ &\det(m_2) = \det Q_2 = 6 - 4 = 2 > 0 \end{aligned}\right\}$ Def. pos.

3) $q_3(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2$

$Q_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \quad \det m_1 = 1$
$\qquad \det m_2 = 0$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \cancel{4} - \lambda - 4\lambda + \lambda^2 \cancel{- 4}$$
$$= -5\lambda + \lambda^2 = \lambda(\lambda - 5)$$

$Sp(Q_3) = \{0, 5\}$ → semi-def positive

4) $q_4(x,y) = 3xy \quad \left.\begin{aligned} &q(-1,1) = -3 \\ &q(1,1) = 3 \end{aligned}\right\}$ indéfinie

5) $q_5(x,y) = -2x^2 + 2xy - 5y^2$

$Q_5 = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \left.\begin{aligned} &\det m_1 = -2 \\ &\det m_2 = 10 - 1 = 9 \end{aligned}\right\}$ Définie négative

Exercice 7.6 — Classifier, en fonction de α, la forme quadratique representee par :

$$A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha \\ 1 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

Correction 7.6 On observe que A ne représente pas une forme quadratique car la matrice n'est pas symétrique dans le cas général :

$$Q(x,y) = (x \quad y)A(x \quad y)^T = ((1+\alpha)x + y \quad \alpha x + 2\alpha y)(x \quad y)^T = (1+\alpha)x^2 + (1+\alpha)xy + 2\alpha y^2$$

Ce qui nous permet d'écrire la véritable forme quadratique :

$$\tilde{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2(1+\alpha) & (1+\alpha) \\ (1+\alpha) & 4\alpha \end{pmatrix}$$

On utilise alors le critère de Silvester et on étudie les cas de semi-définition :

- $m_1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > -1$ et $m_2 = \det(\tilde{A}) > 0 \Leftrightarrow 6\alpha + 7\alpha^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)(7\alpha-1) > 0 \Rightarrow \alpha > \frac{1}{7}$.
  On a donc $\tilde{A}$ définie positive si $\alpha > \frac{1}{7}$.
- $m_1 < 0 \Leftrightarrow \alpha > -1$ et $m_2 = \det(\tilde{A}) > 0 \Leftrightarrow 6\alpha + 7\alpha^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)(7\alpha-1) > 0 \Rightarrow \alpha < \frac{1}{7}$.
  On a donc $\tilde{A}$ définie négative si $\alpha < -1$.
- Si $\alpha = -1$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui est semi-définie négative (son spectre est $0\{,-2\}$).
  Si $\alpha = \frac{1}{7}$, $\tilde{A} = \frac{2}{7}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ qui est semi-définie positive (son spectre est $0\{,\mathrm{tr}(\tilde{A}) = \frac{10}{7}\}$).
- $\tilde{A}$ est indéfine sinon $(-1 < \alpha < \frac{1}{7})$.

7.7 1) $f_1(x,y) = xy \exp(-(x^2+y^2))$

f_1 est différentiable sur $\mathbb{R}^2$ comme produit
- d'un polynome (forme quad)
- exp composée avec un polynome

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y \exp(-(x^2+y^2))(1-2x^2) = 0 \\ x \exp(-(x^2+y^2))(1-2y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \\ y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -4xy \exp(-(x^2+y^2)) + y(1-2x^2)(-2x)\exp(-(x^2+y^2))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -4xy \exp(-(x^2+y^2)) + x(1-2y^2)(-2y)\exp(-(x^2+y^2))$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -(1-2x^2)\exp(-(x^2+y^2)) + y(1-2x^2)(-2y)\exp(-(x^2+y^2))$$

On évalue la hessienne pour chacun des points :

- Pour $(0,0)$: $H_f = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ → indéfinie $\quad q(x,y) = xy \quad q(1,1) > 0$
$\qquad q(-1,1) < 0$

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \text{ ou } \lambda = -1$$

→ $(0,0)$ est un point selle.