TD VII

7.2 $f(x,y) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{y}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ calculer $f_{xy}(0,0)$ $f_{yx}(0,0)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \sin \frac{y}{x} - y \cos \frac{y}{x}$ pour $x \neq 0$ d'où $\frac{\partial f}{\partial x}$ existe sur $\mathbb{R}^2$

$\lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \frac{h^2 \sin 0}{h} = 0$

$\frac{\partial f}{\partial y} = x \cos \frac{y}{x}$ $\lim_{h \to 0} \frac{f(0,h) - f(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$

$= x^2 \left[\frac{y}{x}\right]' \sin'\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x^2}{x} \cos\left(\frac{y}{x}\right) = x \cos \frac{y}{x}$ d'où $\frac{\partial f}{\partial y}$ existe sur $\mathbb{R}^2$

$f_{xy}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{h} = \frac{0-0}{h} = 0$

$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h,0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{h} = \frac{h-0}{h} = 1$

7.3 Vérifier que $f_{xx} + f_{yy} = 0$

1) $f(x,y) = e^x \sin y$

$\frac{\partial f}{\partial x} = (\sin y) e^x$ $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (\sin y) e^x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \sin y$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = e^x \sin y - e^x \sin y = 0$

2) $f(x,y) = x^3 - 3xy^2$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -6xy$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6x$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x - 6x = 0$

3) $f(x,y) = x^4 - 6x^2y^2 + y^4$

$\frac{\partial f}{\partial x} = 4x^3 - 12xy^2$ $\frac{\partial f}{\partial y} = -12x^2y + 4y^3$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 12x^2 - 12y^2$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -12x^2 + 12y^2$

$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ □

7.4 Écrire la différentielle seconde en $(0,0)$ de $f(x,y) = e^x \sin y$

Rappel : $d^2 f_a(h) = h^T H_f(a)\, h$ $h = (x,y)$

$\frac{\partial f}{\partial x} = e^x \sin y$ $\frac{\partial f}{\partial y} = e^x \cos y$ $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = e^x \sin y$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^x \cos y$ $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -e^x \sin y$

$H_f(h_1,h_2) = \begin{pmatrix} e^{h_1} \sin h_2 & e^{h_1} \cos h_2 \\ e^{h_1} \cos h_1 & -e^{h_1} \sin h_2 \end{pmatrix} = e^{h_1} \begin{pmatrix} \sin h_2 & \cos h_2 \\ \cos h_1 & -\sin h_2 \end{pmatrix}$

$$d^2_{(h_1,h_2)} f(x,y) = \underset{1\times 2}{(x \quad y)}\, e^{h_1} \underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} \sin h_2 & \cos h_2 \\ \cos h_1 & -\sin h_2 \end{pmatrix}} \underset{2\times 1}{(x \quad y)^T}$$

$= e^{h_1}(x \sin h_2 + y \cos h_1 \quad x \cos h_2 - y \sin h_2)(x \quad y)^T$

$= e^{h_1}(x^2 \sin h_2 + xy \cos h_2 + xy \cos h_2 - y^2 \sin h_2)$

$= e^{h_1}(x^2 \sin h_2 + 2xy \cos h_2 - y^2 \sin h_2)$

$\boxed{d^2_{(0,0)} f(x,y) = 2xy}$

7.5 2) $q_2(x,y) = 2x^2 + 4xy + 3y^2 \to \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \to$ déf. pos $|2| > 0$ $\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 6 - 4 = 2 > 0$

3) $q_3(x,y) = x^2 + 4xy + 4y^2 \to \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \to |1| > 0$, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 2 \cdot 2 = 0$ } semi-défini positif

4) $q_4(x,y) = 3xy \to \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{pmatrix} \to |0| = 0$, $\begin{vmatrix} 0 & \frac{3}{2} \\ \frac{3}{2} & 0 \end{vmatrix} < 0$ } indéfinie

5) $q_5(x,y) = -2x^2 + 2xy - 5y^2 \to \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \to |-2| < 0$, $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} = 10 - 1 = 9 > 0$ Déf négative

$\Uparrow$

$-\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$ $|2| > 0$, $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} > 0$ } Déf positif

Rappel : Critère de Silvester : déf pos si tous les mineurs sont > 0 ; déf neg s'ils suivent le signe de $(-1)^{\text{ordre}}$.

Exercice 7.6 — Classifier, en fonction de α, la forme quadratique representee par :

$$A = \begin{pmatrix} 1+\alpha & \alpha \\ 1 & 2\alpha \end{pmatrix}$$

Correction 7.6 On observe que A ne représente pas une forme quadratique car la matrice n'est pas symétrique dans le cas général :

$$Q(x,y) = (x \quad y)A(x \quad y)^T = ((1+\alpha)x + y \quad \alpha x + 2\alpha y)(x \quad y)^T = (1+\alpha)x^2 + (1+\alpha)xy + 2\alpha y^2$$

Ce qui nous permet d'écrire la véritable forme quadratique :

$$\tilde{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2(1+\alpha) & (1+\alpha) \\ (1+\alpha) & 4\alpha \end{pmatrix}$$

On utilise alors le critère de Silvester et on étudie les cas de semi-définition :

— $m_1 > 0 \Leftrightarrow \alpha > -1$ et $m_2 = \det(\tilde{A}) > 0 \Leftrightarrow 6\alpha + 7\alpha^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)(7\alpha-1) > 0 \Rightarrow \alpha > \frac{1}{7}$.
On a donc $\tilde{A}$ définie positive si $\alpha > \frac{1}{7}$.

— $m_1 < 0 \Leftrightarrow \alpha > -1$ et $m_2 = \det(\tilde{A}) > 0 \Leftrightarrow 6\alpha + 7\alpha^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow (\alpha+1)(7\alpha-1) > 0 \Rightarrow \alpha < \frac{1}{7}$.
On a donc $\tilde{A}$ définie négative si $\alpha < -1$.

— Si $\alpha = -1$, $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$ qui est semi-définie négative (son spectre est $0\{,-2\}$).
Si $\alpha = \frac{1}{7}$, $\tilde{A} = \frac{2}{7}\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ qui est semi-définie positive (son spectre est $0\{, \mathrm{tr}(\tilde{A}) = \frac{10}{7}\}$).

— $\tilde{A}$ est indéfine sinon ($-1 < \alpha < \frac{1}{7}$).

$\boxed{7.7}$ 1) $f_1(x,y) = xy\exp(-x^2-y^2)$

① On cherche des candidats extremums $\rightarrow$ Théorème de Fermat

$$\nabla f_1(x,y) = \begin{cases} y\exp(-x^2-y^2) + xy(-2x)\exp(-x^2-y^2) \\ x\exp(-x^2-y^2) + xy(-2y)\exp(-x^2-y^2) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} y\exp(-x^2-y^2)(1-2x^2) \\ x\exp(-x^2-y^2)(1-2y^2) \end{cases}$$

$$\nabla f_1(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} y\cancel{\exp(-x^2-y^2)}(1-2x^2) = 0 \\ x\cancel{\exp(-x^2-y^2)}(1-2y^2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1-2x^2) = 0 \\ x(1-2y^2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } \frac{1}{2} = x^2 \\ x = 0 \text{ ou } \frac{1}{2} = y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } x = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } x = -\sqrt{\frac{1}{2}} \\ x = 0 \text{ ou } y = \sqrt{\frac{1}{2}} \text{ ou } y = -\sqrt{\frac{1}{2}} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = y(-2x)\exp(-x^2-y^2)(1-2x^2) + y\exp(-x^2-y^2)(-4x)$$

$$= \underbrace{(-2x)y\exp(-x^2-y^2)[1-2x^2-2]}_{\text{en } (0,0) = 0}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial y^2} = x(-2y)\exp(-x^2-y^2)(1-2y^2) + x\exp(-x^2-y^2)(-4y)$$

$$= \underbrace{(-2y)x\exp(-x^2-y^2)(1-2y^2-2)}_{\text{en } (0,0) = 0}$$

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} = (1-2x^2)\exp(-x^2-y^2) + y(1-2x^2)(-2y)\exp(-x^2-y^2)$$

$$= \underbrace{\exp(-x^2-y^2)(1-2x^2)(1-2y^2)}_{\text{en } (0,0) = 1}$$

Pour $(0,0)$: $H_{f_1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow$ indéfinie $\rightarrow \begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda = 1 \\ \text{ou} \\ \lambda = -1 \end{cases}$

Rappel : la matrice Hessienne s'écrit comme $\begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \Longleftrightarrow d_a^2 f(x,y) = x^2 f_{xx}(a) + 2f_{xy}(a)xy + y^2 f_{yy}(a)$

pour H symétrique