TD VI :

Cours : Si une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable admet un gradient nul sur A (une partie connexe de $\mathbb{R}^n$) alors f est constante sur A.

Exercice $\boxed{6.5}$: Mq $\underbrace{\arctan \frac{y}{x} + \arctan \frac{x}{y}}_{f(x,y)} = \frac{\pi}{2}$ pour $\underbrace{\begin{cases} x > 0 \\ y > 0 \end{cases}}_{\text{connexe}}$

Regardons le gradient $\frac{\partial \arctan z}{\partial z} = \frac{1}{1+z^2}$

$$\frac{\partial \arctan\left(\frac{y}{x}\right)}{\partial x} = \underbrace{-\frac{y}{x} \frac{\partial \arctan z}{\partial z}\left(\frac{y}{x}\right)}_{[f \circ u]' = u' \circ f'} = -\frac{y}{x} \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2} = \frac{-y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial \arctan\left(\frac{x}{y}\right)}{\partial x} = \frac{1}{y} \frac{\partial \arctan z}{\partial z}\left(\frac{x}{y}\right) = \frac{1}{y} \frac{1}{1+\left(\frac{x}{y}\right)^2} = \frac{y}{x^2+y^2}$$

$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = \frac{y}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2} = 0$$

$\longrightarrow$ Même chose pour $\frac{\partial f}{\partial y}$ (à faire vs même)

$\Rightarrow \nabla f(x,y) = 0$ sur un connexe

$\Rightarrow f$ est constante

$f(1,1) = 2 \arctan 1 = \frac{\pi}{2}$

$\boxed{6.6}$ Mq $\underbrace{\arctan\left(\frac{y}{x}\right) + \arctan\left(\frac{x}{y}\right)}_{f(x,y)} = -\frac{\pi}{2}$ pour $\begin{cases} x > 0 \\ y < 0 \end{cases}$

$\nabla f(x,y)$ est aussi nul sur cet ensemble (cf. question précédente)

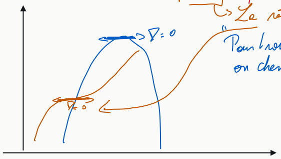
Ainsi f est constante. En regardant $f(1,-1)$ on trouve $\frac{-\pi}{2}$

Cours : Théorème de Fermat : $f : E \to \mathbb{R}$ avec $E \subseteq \mathbb{R}^n$ ouvert, f différentiable sur E,

Si f admet un extrêmum en $a \in E$ $\boxed{\text{alors}}$ $\nabla f(a) = 0$

↳ La réciproque est fausse

« Pour trouver le maximum / minimum on cherche les pts critiques »



$\boxed{6.7}$ Mq : $f(x,y) = (x-y)^2 + (x+y)^3$ n'a pas d'extremum local

Par le th. de Fermat si f admet un extremum alors $\nabla f = 0$ en un pt (f étant trivialement différentiable)

$$\nabla f(x,y) = \left(2(x-y) + 3(x+y)^2 \,;\, -2(x-y) + 3(x+y)^2\right)$$

$$\nabla f(x,y) = 0 \iff \begin{cases} (x+y)^2 = -\frac{2}{3}(x-y) \\ (x+y)^2 = \frac{2}{3}(x-y) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = -(x+y)^2 \\ (x+y)^2 = \frac{2}{3}(x-y) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 0 \\ (x+y)^2 = \frac{2}{3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = -y \\ x = y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc $f(0,0)$ est le seul candidat extrêmum.

$f(0,0) = 0$ Mais $\forall \varepsilon > 0$ $f(0+\varepsilon, 0) = \varepsilon^2 + \varepsilon^3 > f(0,0)$ ce n'est donc pas un extrêmum valide.

Cours : $\hat{x}$ est un extrêmum de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ssi il existe un ouvert $\mathcal{C}$ tq
$\hat{x} \in \mathcal{C}$ et $\forall x \in \mathcal{C}$ $f(x) \le f(\hat{x})$ ou $f(x) \ge f(\hat{x})$

$\boxed{6.8}$ Calculer max/min de $f(x,y) = x - y$ sur la boule fermée de centre $(2,1)$ et de rayon 5.

$0 \le R < 5$

Réécrivons la contrainte : $\begin{cases} x = 5\cos\theta + 2 \\ y = 5\sin\theta + 1 \end{cases}$ bordure de la boule

$g(\theta) = f(5\cos\theta + 2, 5\sin\theta + 1) = 5(\cos\theta - \sin\theta) + 1$

$\nabla g(\theta) = \nabla(\cos\theta - \sin\theta) = 0 \iff -\sin\theta - \cos\theta = 0$

$\iff \tan\theta = -1$

$\Rightarrow \theta \in \{n \in \mathbb{Z}, 2\pi n - \frac{\pi}{4}\}$

ou $\theta \in \{n \in \mathbb{Z}, 2\pi n - \frac{3\pi}{4}\}$

On a supposé le max/min sur la bordure

$g(\theta_{max}) = 1 + R\sqrt{2}$ $\to R = 5$

$g(\theta_{min}) = 1 - R\sqrt{2}$ $\to R = 5$

$g(\theta, R) = f(R\cos\theta + 2, R\sin\theta + 1) = R(\cos\theta - \sin\theta) + 1$

$\nabla g(\theta, R) = (-R(\sin\theta + \cos\theta) \, ; \, \cos\theta - \sin\theta) = 0$

$\iff \begin{cases} -\sin\theta - \cos\theta = 0 \\ \cos\theta - \sin\theta = 0 \end{cases}$

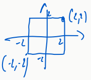
On obtient une solution qui ne dépend pas de R.

$\forall n \in \mathbb{Z}$

$g(2\pi n - \frac{\pi}{4}, R) = f(R\cos(2\pi n - \frac{\pi}{4}) + 2 \, ; \, R\sin(2\pi n - \frac{\pi}{4}) + 1)$

$= R\Big(\underbrace{\cos(2\pi n - \frac{\pi}{4}) - \sin(2\pi n - \frac{\pi}{4})}_{\sqrt{2}}\Big) + 1$

$= R\sqrt{2} + 1$



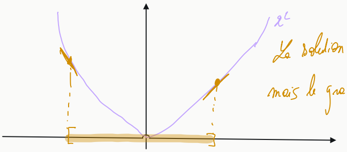
$\boxed{6.9}$ Calculer min/max de $f(x,y) = x^2 + xy + y^2$ sur le carré $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \boxed{\begin{matrix} -2 \le x \le 2 \\ -2 \le y \le 2 \end{matrix}}\}$

⚠ Le théorème de Fermat est valide sur un ouvert

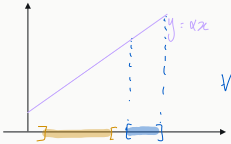
Méthode sur un fermé : ① Chercher max/min sur l'int de l'ensemble

② Etudier la bordure (⚠ Sur la bordure le gradient n'est pas nul en général)

Exemple



La solution est sur la bordure mais le gradient n'y est pas nul !



V ouvert, ni max, ni min

V fermé il y a un max et un min sur les bordures mais pas de grad nul.

Corrigeons $\boxed{6.9}$: On regarde sur $\mathbb{R}^n$:

$$\nabla f(x,y)=0 \iff \begin{cases} 2x+y=0 \\ 2y+x=0 \end{cases} \iff x=y=0$$

f est quadratique convexe donc $(0,0)$ est un minimum global

Si on ne veut pas utiliser cet argument $\forall \varepsilon > 0$ on peut observer que f ne peut pas être strictement négative.

$$\left(\begin{array}{ll} f(\varepsilon,\varepsilon) = \varepsilon^2+\varepsilon^2+\varepsilon^2 = 3\varepsilon^2 > 0 & \\ f(\varepsilon,0) = \varepsilon^2 > 0 & f(\varepsilon,-\varepsilon) = \varepsilon^2-\varepsilon^2+\varepsilon^2 = \varepsilon^2 > 0 \\ f(0,\varepsilon) = \varepsilon^2 > 0 & f(-\varepsilon,0) = \varepsilon^2 > 0 \end{array} \right)$$

On remarque qu'il n'y a qu'un seul point critique, qui est un minimum.

Quid du max ? → il n'existe que parce qu'on se place sur un carré fermé.

On observe que f est croissante dans ses deux composantes. $\frac{\partial f}{\partial x} \geq 0$ $\frac{\partial f}{\partial y} \geq 0$

Le maximum est donc atteint en $(2,2)$. $f(2,2) = 2^2+2^2+2^2 = 3\cdot 4 = 12$

Mais comme f est paire, on a que le maximum est aussi atteint en $(-2,-2)$

On peut vérifier en observant

$$\begin{cases} -2 \leq x \leq 2 \\ -2 \leq y \leq 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 \leq x^2 \leq 4 \\ 0 \leq y^2 \leq 4 \\ -4 \leq xy \leq 4 \end{cases} \Rightarrow x^2+xy+y^2 \leq 3\cdot 4 = 12$$

Or $f(2,2)$ et $f(-2,-2)$ sont égaux à 12

On ne peut donc pas trouver mieux sur C.

Note : si vous avez $f(x,y) = g(x,y) + g_2(x,y) + g_3(x,y) \dots = \sum_{i=1}^{n} g_i(x,y)$

alors $\max f(x,y) \leq \sum_{i=1}^{n} \max(g_i(x,y))$

⚠ la somme des maxima n'est pas nécessairement atteignable

ex: $f(x) = g_1(x) + g_2(x)$ $\quad \left.\begin{array}{l} g_1(x) = x \\ g_2(x) = 1-x \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{cases} \max g_1(x) = 1 \\ \max g_2(x) = 1 \end{cases} \Rightarrow \sum_{i=1}^{2} \max g_i(x) = 2$ $\quad x \in [0,1]$

$f(x) = x+1-x = 1 \Rightarrow \max f(x) = 1$

$\boxed{6.10}$ Max $f(x,y) = |x|^{1/4} + |y|^{1/4}$ sur $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, \; x^2+y^2 \leq 2\}$

La contrainte se réécrit comme $\begin{cases} x = R\cos\theta \\ y = R\sin\theta \end{cases}$ avec $0 \leq R \leq \sqrt{2}$

$$g(\theta R) = f(R\cos\theta, R\sin\theta) = |R\cos\theta|^{1/4} + |R\sin\theta|^{1/4}$$
$$= R^{1/4}\left((\cos^2\theta)^{1/8} + (\sin^2\theta)^{1/8}\right)$$

En cherchant les points critiques on trouve $\theta \in \{n \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{4} + 2\pi n\}$

$$\frac{dg}{d\theta} = 0 \Leftrightarrow \theta^* \in \{n \in \mathbb{Z}, \frac{\pi}{4} + 2\pi n\}$$

$$\cos(\theta^*) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin(\theta^*) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$g(\theta^*) = R^{1/4}\left(2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{1/4}\right)$ → ce qui maximum pour $R = \sqrt{2}$
(le max de R possible)

$\boxed{6.11}$ $f(x,y) = \frac{x^2+y^2}{x+y}$ → Extrema sur son domaine (1)
sur le cercle de rayon $\sqrt{2}$ centre $(-1,-1)$ (2)

1) Domaine de f : $\operatorname{dom} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x \neq -y\}$

Sur $\mathbb{R}^n$, on observe

$$\nabla f(x,y) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x(x+y) - (x^2+y^2)}{(x+y)^2} = 0 \\ \frac{2y(x+y) - (x^2+y^2)}{(x+y)^2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + xy - y^2 = 0 \\ 2xy + y^2 - x^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 0 \\ y^2 = x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Or $(0,0)$ n'est pas dans le domaine de f (et donc de $\nabla f(x,y)$) donc f n'admet pas de points critiques. → pas d'extrema globaux.

2) Sur le cercle de centre $(-1,-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$:

$$x = \sqrt{2}\cos\theta - 1 \qquad y = \sqrt{2}\sin\theta - 1$$

$$g(\theta) = \left(\frac{(\sqrt{2}\cos\theta - 1)^2 + (\sqrt{2}\sin\theta - 1)^2}{\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta) - 2}\right.$$
$$= \frac{2\cos^2\theta - 2\sqrt{2}\cos\theta + 1 + 2\sin^2\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta + 1}{\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta) - 2}$$
$$= \frac{4 - 2\sqrt{2}\cos\theta - 2\sqrt{2}\sin\theta}{\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta) - 2} = -2\frac{(\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta) - 2)}{\sqrt{2}(\cos\theta + \sin\theta) - 2} = -2$$

$\Rightarrow f(x,y)$ est constante sur le cercle de centre $(-1,-1)$ et de rayon $\sqrt{2}$
$\Rightarrow$ pas d'extrémum.

Note : Observez que le cercle $(-1,-1)$ rayon $\sqrt{2}$ s'écrit
$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, (x+1)^2 + (y+1)^2 = 2\} \Leftrightarrow \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, f(x,y) = -2\}$$

$\boxed{6.12}$ $a > 0$, Min $f(x,y) = \sqrt{x^2 + (y-a)^2} + \sqrt{y^2 + (x-a)^2}$

Réécrivons f comme $f(x,y) = \|(x,y) - (0,a)\|_2 + \|(x,y) - (a,0)\|_2$

Par l'inégalité triangulaire $\underbrace{\|2(x,y)-(a,a)\|_2}_{\text{facile à minimiser}} \le \|(x,y)-(0,a)\|_2 + \|(x,y)-(a,0)\|_2 = f(x,y)$

$\|2(x,y)-(a,a)\|_2$ est minimal lorsque $\|(2x-a,\ 2y-a)\|_2$ est minimal

$$= \sqrt{(2x-a)^2+(2y-a)^2}$$

qui est trivialement minimal pour $\begin{cases} 2x-a=0 \\ 2y-a=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=\frac{a}{2} \\ y=\frac{a}{2} \end{cases}$

Le minimum de f est donc atteint en $\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ et vaut $f\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)=a\sqrt{2}$

$\boxed{6.13}$ $f(x,y)=x^2+2y^2-2xy-2y+1$ Mq $(1,1)$ est le seul point de minimum

f est définie et différentiable sur $\mathbb{R}^2$ (ouvert ⇒ th. Fermat).

$$\nabla f(x,y)=0 \iff \begin{cases} 2x-2y=0 \\ 4y-2x-2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x=y \\ x=1 \end{cases} \iff (x,y)=(1,1)$$

$\boxed{6.14}$ $f(x,y)=(\sin x)\exp(y) \longrightarrow$ Mq pas de max et de min

Dom $f=\mathbb{R}^2$ f est aussi différentiable sur $\mathbb{R}^2$ (composée de sin et exp par ×)

D'où par le théorème de Fermat, si f admettait un max ou un min on aurait

$$\nabla f(x,y)=0 \iff \begin{cases} \cos x \ \exp(y)=0 \\ \sin x \ \exp(y)=0 \end{cases} \iff \left.\begin{cases} \cos x=0 \\ \sin x=0 \end{cases}\right\} \text{impossible !}$$

D'où le gradient ne peut pas être nul, donc par Fermat, il n'y a pas d'extremum.