TD V :

5.10 $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 y}{x^2+y^4} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

Continuité en $(0,0)$:

$$\lim_{(x,y)\to 0} f(x,y) = \lim_{R\to 0} \frac{R^3\cos^3\theta \, R\sin\theta}{R^2\cos^2\theta + R^4\sin^4\theta} \quad \lim_{R\to 0} \frac{R^4\left[\cos^3\theta\sin\theta\right]}{R^2\left[\cos^2\theta + R^2\sin^4\theta\right]} = 0$$

La dérivabilité $(0,0)$: $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2y(x^2+y^4) - x^3y\,2x}{(x^2+y^4)^2} = \frac{x^4y + 3x^2y^5}{(x^2+y^4)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3(x^2+y^4) - x^3y(4y^3)}{(x^2+y^4)^2} = \frac{x^5 + \quad -3x^3y^4}{(x^2+y^4)^2}$$

Pour $(x,y)\neq(0,0)$

On observe que $\displaystyle\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x} = 1 \neq 0 = \lim_{\substack{x\to 0\\ y=\sqrt{x}}} \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ D'où $\frac{\partial f}{\partial x}$ n'est pas continue en $(0,0)$. D'où f n'est pas différentiable en $(0,0)$

5.11 $z = 1 - 2x^2 - y^4$ En coordonnées polaires un chemin qui descend est $\rho = 2\theta$, $\theta\in[0,3\theta]$

Écrire $\frac{dz}{d\theta}$: $x = 2\theta\cos\theta$ $\quad y = 2\theta\sin\theta$ d'où $z = 1 - 4\theta^2\cos^2\theta - 16\theta^4\sin^4\theta$

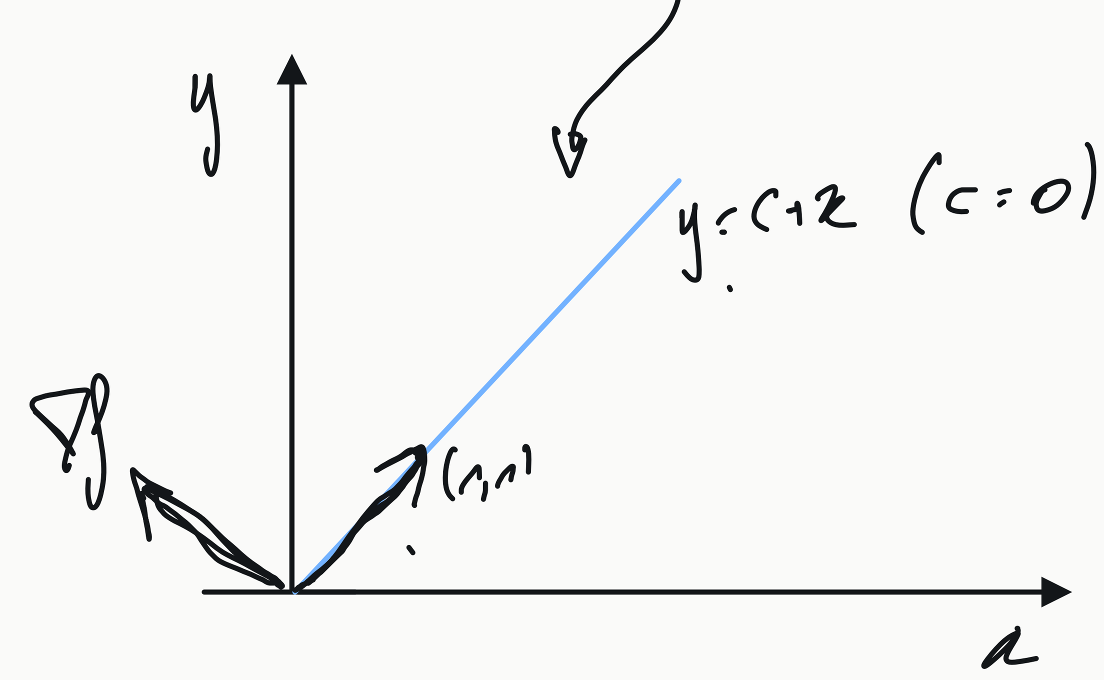
$$\frac{dz}{d\theta} = -16\theta\cos^2\theta + 16\theta\cos\theta\sin\theta - 64\theta^3\sin\theta - 64\theta^4\cos\theta\sin^3\theta$$

5.12 La ligne de niveau c pour $f(x,y)$ est $\mathcal{L}_c = \{f(x,y)=c\}$

$f(x,y) = c \iff y - x = c \iff \boxed{y = c+x} \longrightarrow$ vecteur directeur $(1,1)$

$$\nabla f(x,y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) = (-1, 1)$$

On a bien $\langle(-1,1),(1,1)\rangle = -1+1 = 0$



5.13 $f(x,y) = e^x$ $\qquad \nabla f(x,y) = (e^x, 0)$

La ligne de niveau c est $\mathcal{L}_c = \{f(x,y)=c\}$ $\qquad e^x = c \iff \boxed{x = \ln c}$ pour $c>0$

La ligne de niveau c est donc une droite verticale, elle est engendrée par $(0,1)$

$\langle(e^x,0),(0,1)\rangle = 0$ d'où $\nabla f(x,y)$ est bien orthogonal à $\mathcal{L}_c$.