Analyse dans $\mathbb{R}^n$ - Licence 2

Aldric Labarthe - Université Paris 1

TD5 - Dérivées ($\pm$ *2 séances*)

Alerte 1: Dérivabilité n'est pas différentiabilité !

Au lycée, il est usuel d'apprendre l'implication "Dérivabilité $\Rightarrow$ Continuité". Cette implication est très confusante. Premièrement, elle n'est valable que dans $\mathbb{R}$. Secondement, elle mélange les deux notions de dérivabilité et de différentiabilité. Sa version "plus claire" dans $\mathbb{R}$ est "Dérivabilité $\Leftrightarrow$ Différentiabilité $\Rightarrow$ Continuité".
Les deux notions de différentielle et de dérivées ne doivent pas être confondues. Toujours en dimension 1, il faut se rappeler que la dérivée de f est $f' : x \longmapsto f'(x)$ là où la différentielle au point $a \in D_f$ est $df_a : x \longmapsto f'(a)x$. Autre différence, la différentielle est par définition une approximation linéaire locale de la fonction, là où, en général, la dérivée n'est pas linéaire (en réalité la dérivée en un point est même un réel).

Cours 1: Dérivabilité et différentiabilité

Fonction différentiable en un point Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est dite **différentiable** en un point $a \in \mathbb{R}^n$ si :

$$\exists df_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ linéaire et continue, telle que } \lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - df_a(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

La fonction linéaire df_a est appelée la **différentielle** de f en a.
Dérivée partielle : La dérivée partielle de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ par rapport à la $i^{\text{ème}}$ coordonnée en un point a est définie par :

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \lim_{t\to 0} \frac{f(a+te_i) - f(a)}{t},$$

où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.
Si on remplace e_i par un vecteur (*verseur*), on obtient la définition de la dérivée directionnelle.
Gradient : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est différentiable en a, le **gradient** de f en a est le vecteur :

$$\nabla f(a) = \left[\tfrac{\partial f}{\partial x_1}(a), \tfrac{\partial f}{\partial x_2}(a), \ldots, \tfrac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right]^t.$$

{Dérivabilité + continuité des dérivées} implique différentiabilité : Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ admet toutes ses dérivées partielles et qu'elles sont continues dans un voisinage de a, alors f est différentiable en a.
Jacobienne : La matrice jacobienne de $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ en un point a est définie par :

$$J_f(a) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{bmatrix}.$$

La matrice $J_f(a)$ représente la différentielle de f en a.
Plan tangent : Soit une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable en un point $a \in \mathbb{R}^n$. Le **plan tangent** au graphe de f en a est l'ensemble des points $(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ tels que :

$$y = f(a) + \nabla f(a) \cdot (x - a),$$

où $\nabla f(a)$ est le gradient de f en a. En dimension $n = 2$, le plan tangent devient une tangente au graphe de f.
Différentiabilité implique continuité Si une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ est différentiable en un point $a \in \mathbb{R}^n$, cela signifie qu'il existe une application linéaire df_a telle que :

$$\lim_{\|h\|\to 0} \frac{\|f(a+h) - f(a) - df_a(h)\|}{\|h\|} = 0.$$

En particulier, lorsque $\|h\| \to 0$, on a $f(a+h) - f(a) = df_a(h) + o(\|h\|)$, où $o(\|h\|)$ est un terme qui tend vers 0 plus rapidement que $|h|$. Comme df_a est linéaire, il existe une constante C telle que $df_a(h) \leqslant C|h|$. Par conséquent, lorsque $\|h\| \to 0$, il en résulte que :

$$f(a+h) - f(a) = df_a(h) + o(|h|) \leqslant \underbrace{C|h| + o(|h|)}_{\to 0} \Rightarrow f(a+h) \to f(a)$$

Ce qui montre que f est continue en a.

TD6 - Théorèmes sur les fonctions dérivables et premiers problèmes d'optimisation (± *2 séances*)

Rappel 1: Théorème de Lagrange, cas réel

Théorème de la valeur moyenne Soit $f : [a,b] \longmapsto \mathbb{R}$, une fonction continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, il existe alors au moins un point $c \in]a,b[$ qui vérifie :

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Géométriquement, il existe un point c où la tangente au graphe de f est parallèle à la droite sécante reliant les points $(a, f(a))$ et $(b, f(b))$.
Pourquoi faire ? Pour des fontions sur $\mathbb{R}^n$ on a que $|f(x+h) - f(x)| = |\nabla f(x) \cdot h|$, ce qui permet donc d'estimer facilement $|f(x+h) - f(x)|$.

Cours 2: Cônes ouverts et fonctions homogènes

Cône ouvert Un sous-ensemble C de $\mathbb{R}^n$ est un cône ouvert ssi :

$$\forall \lambda > 0 : x \in C \Rightarrow \lambda x \in C$$

Fonction homogène Une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est dite homogène de degré α si pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ et tout $\lambda > 0$, on a :

$$f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$$

Théorème d'Euler Soit $f : C \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction homogène de degré α. Alors,

$$\forall x \in C : \quad \langle x, \nabla f(x) \rangle = \alpha f(x)$$

Rappel 2: Connexes et gradient nul

Ensemble connexe Un sous-ensemble A de $\mathbb{R}^n$ est dit connexe ssi pour tout U et V ouverts tels que :

$$U \cap V = \varnothing, V \neq \varnothing, U \neq \varnothing, \quad A = U \cup V \Rightarrow U \cap V \neq \varnothing$$

Gradient nul Si une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ différentiable admet un gradient nul sur A une partie connexe de sa définition, alors f est constante sur cette partie A.

Cours 3: Optimisation

Extremum local Pour $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$, $\hat{x}$ est un extrêmum local de f sur $\mathcal{C} \subset \mathbb{R}^n$ ouvert ssi $\forall x \in \mathcal{C}, f(x) \geqslant f(\hat{x})$.
Théorème de Fermat Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur un ouvert U de $\mathbb{R}^n$. Si f admet un extremum local en un point $a \in U$, alors le gradient de f en a est nul :

$$\nabla f(a) = 0$$