Analyse dans $\mathbb{R}^n$ - Licence 2

Aldric Labarthe - Université Paris 1

TD1 - Rappels (± *1 séance*)

Rappel 1: Coordonnées polaires

$$\forall X = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \exists R \in \mathbb{R}_+, \exists \theta \in \mathbb{R} : \quad \begin{cases} x_1 = R\cos\theta \\ x_2 = R\sin\theta \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = R \end{cases}$$

TD2 - Topologie (± *2 séances*)

Cours 1: Norme et Distance

Norme Une **norme** sur un espace vectoriel E est une application

$$\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}^+$$

qui satisfait les propriétés suivantes pour tout $x, y \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$:

— **Positivité :** $\|x\| \geqslant 0$ et $\|x\| = 0 \iff x = 0$,

— **Homogénéité :** $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

— **Inégalité triangulaire :** $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Distance Une **distance** sur un ensemble X est une application

$$d : X \times X \to \mathbb{R}^+$$

qui satisfait les propriétés suivantes pour tout $x, y, z \in X$:

— **Positivité :** $d(x, y) \geqslant 0$ et $d(x, y) = 0 \iff x = y$,

— **Symétrie :** $d(x, y) = d(y, x)$,

— **Inégalité triangulaire :** $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$.

Cours 2: Ouverts d'un espace métrique, Bolzano-Weierstrass et suites de Cauchy

Ensemble ouvert Un sous-ensemble $A \subset X$ d'un espace métrique (X, d) est **ouvert** si, pour tout point $x \in A$, il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que la boule ouverte

$$B(x, \varepsilon) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$$

soit contenue dans A : $B(x, \varepsilon) \subset A$.
Ensemble fermé Un sous-ensemble $A \subset X$ d'un espace métrique (X, d) est **fermé** si son complémentaire $X \backslash A$ est ouvert. Autrement dit, A est fermé si pour toute suite $(x_n) \subset A$ qui converge vers $x \in X$, on a $x \in A$.
Suite de Cauchy Une suite $(x_n) \subset X$ dans un espace métrique (X, d) est dite **de Cauchy** ssi :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall m, n \geqslant N, \quad d(x_n, x_m) < \varepsilon.$$

Théorème de Bolzano-Weierstrass Toute suite bornée dans $\mathbb{R}^n$ possède une sous-suite convergente.

— Une suite (x_n) est bornée s'il existe un réel $M > 0$ tel que $\|x_n\| \leqslant M$ pour tout n.

— Une sous-suite est une suite extraite des termes de (x_n), notée $(x_{\varphi(n)})$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante.